رسالہ فی خواص المثلث من جہۃ العمود

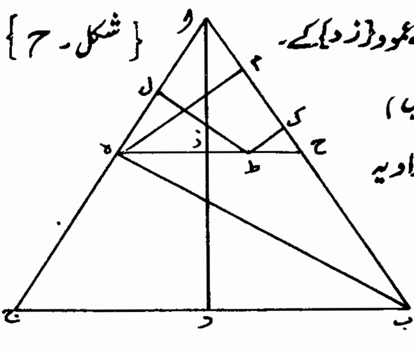
از امام ابن الہیثم ○ ترجمہ و تحشیہ سید فضل احمد شمسی، فیلو ادارۂ تحقیقات اسلامی، اسلام آباد

۶

[اگر کسی بھی مثلث متساوی الساقین کے قاعدے کے کسی زاویہ کی تنصیف کسی ایسے خط سے کریں جو زاویہ کے راس سے متقابل ساق تک جائے۔ اور ایک ساق سے دوسری ساق تک ایک ایسا خط قاعدے کے متوازی کھینچیں جو ایک ساق میں اُس نقطہ پر ملے جو زاویئے کو تقسیم کرنے والے خط کا اُس ساق سے نقطہ اتصال ہے، تو اس متوازی خط کے کسی نقطہ سے ساقین پر گرائے گئے عمودوں کا مجموعہ متوازی خط (کے کسی نقطہ) سے قاعدے پر گرائے گئے عمود کے برابر ہوگا]

[مثال] ہم پھر مثلث متساوی الساقین کو لیتے ہیں۔ مثلث ا ب ج ایک ایسی مثلث ہے۔ [جس میں ا ب = ا ج] زاویہ ا ب ج کی تنصیف خط [ب ہ] سے کرتے ہیں اور قاعدے کے متوازی خط ہ ح [نقطہ ہ سے دوسری ساق تک] نکالتے ہیں۔ [اب نقطہ ا سے] عمود [ا ز د] نکالتے ہیں [یعنی نقطہ ا سے قاعدے پر عمود ا د گراتے ہیں جو کہ خط ہ ح کو نقطہ ز پر کاٹتا ہے۔] میرا دعویٰ ہے کہ خط ہ ح کے کسی نقطہ سے اگر خطوط ا ہ اور ا ح پر عمود گرائے جائیں تو ان عمودوں کا مجموعہ عمود ز د کے برابر ہوگا۔ خط ہ ح پر ایک نقطہ ط مان لیتے ہیں اور اس سے [ساقین پر] عمود ط ک اور ط ل نکالتے ہیں۔ [گویا] دعویٰ یہ ہے کہ ط ک اور ط ل کا مجموعہ برابر ہے عمود [ز د] کے۔

{ شکل - ح }



ثبوت: ([نقطہ ہ سے دوسری ساق پر] عمود ہ م گراتے ہیں)

چونکہ خط ہ ح۔ خط ج ب کے متوازی ہے، اور زاویہ ح ہ ب مساوی ہے زاویہ ہ ب ج کے،

اور، [چونکہ خط ہ ب زاویہ ا ب ج کو دو برابر

حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

زاویہ ہ ب ج برابر ہے زاویہ ہ ب ح کے

لہٰذا، زاویہ ح ہ ب برابر ہے زاویہ ہ ب ح کے۔

پس، خط ہ ح برابر ہے خط ح ب کے۔

لہٰذا، ا ح کی نسبت ب ح سے وہی ہے جو ا ح کو [ہ ح] سے ہے۔

[اب چونکہ مثلثات ا د ب اور ا ز ح متشابہ ہیں،
ا د کی نسبت ا ز سے وہی ہے جو ا ب کو ا ح سے ہے
∴ (چونکہ ا د = ا ز + د ز۔ اور ا ب = ا ح + ب ح)
(ا ز + د ز) کی نسبت ا ز سے وہی ہے جو (ا ح + ب ح) کو ا ح سے ہے۔
چونکہ، اگر (ا + ب) : ا :: (ج + د) : ج، تو ب : ا :: د : ج،
∴ د ز کی نسبت ا ز سے وہی ہے جو ب ح کو ا ح سے ہے
چونکہ اگر، ا : ب :: ج : د، تو د : ج :: ب : ا]

لہٰذا، ا ح کی نسبت ح ب سے وہی ہے جو ا ز کو ز د سے ہے۔[۲۳]

اور [مثلث۔ ا ہ ح میں ا ز عمود ہے ہ ح پر اور ہ م عمود ہے ا ح پر، لہٰذا]

ا ح کی نسبت ح ہ سے وہی ہے جو عمود ا ز کو عمود ہ م سے ہے۔

پس، [چونکہ یہ ثابت ہو چکا ہے کہ ا ز : د ز :: ا ح : ہ ح اور ا ز : د ز :: ا ز : ہ م، لہٰذا]
ا ز کی نسبت ز د سے وہی ہے جو ا ز کو ہ م سے ہے۔

لہٰذا، عمود ہ م برابر ہے ز د کے۔

اور [چونکہ مثلث ا ہ ح متشابہ ہے مثلث ا ج ب سے۔ لہٰذا مثلث ا ہ ح ایک متساوی الساقین مثلث ہے۔ چنانچہ]

عمود ہ م برابر ہے عمودین ط ک اور ط ل کے مجموعہ کے، ([ایک] سابقہ [مسئلہ اثباتی] کے مطابق)۔

لہٰذا، عمودین ط ک اور ط ل کا مجموعہ برابر ہے عمود ز د کے۔ [وذلک ما اردنا بیانہ]

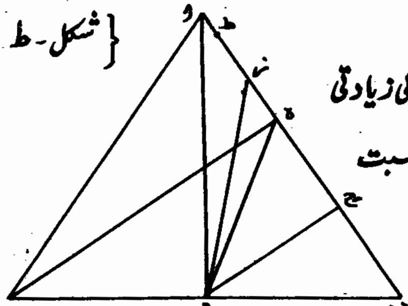
(اور اس ثبوت کا اطلاق ہر قسم کی مثلث متساوی الساقین پر ہوتا ہے۔)

— ۷ —

ہر حاد الزاویہ متساوی الساقین مثلث[۲۴] کے ساقین میں سے کسی ایک ضلع کی زیادتی DIFEERENCE
اُس عمود سے جو اُس پر [مخالف زاویہ کے راس سے] گرتا ہو، اور اُس عمود کی زیادتی مسقط (الحجر)[۲۵]
سے، اور مسقط الحجر کا دوگنا، تینوں بالترتیب ہم نسبت ہوں گے۔

(مثال) ا ب ج ایک متساوی الساقین مثلث ہے۔ ضلع ا ب برابر ہے ضلع ا ج کے۔ [مثلث کے] تینوں
زاویئے حادہ ہیں۔ اس [مثلث] میں [قاعدے کے زاویئے ج سے ساق ا ب پر] عمود ج ہ
کھینچا گیا ہے۔

{شکل۔ ط}



دعویٰ یہ ہے کہ ا ب کی زیادتی ج ہ سے، ج ہ کی زیادتی
ہ ب سے، اور ہ ب کا دوگنا، تینوں ترتیب وار ہم نسبت
ہیں۔[۲۶]

ثبوت: [نقطہ ا سے قاعدے پر] عمود ا د اور
[نقطہ د سے ساق ا ب پر] عمود د ح نکالتے ہیں، اور ح ہ کو ب ح کے برابر لیتے ہیں۔[۲۷]
[نقاط] ہ اور د کو ملاتے ہیں اور زاویہ ا د ہ کی خط د ز سے تنصیف کرتے ہیں۔
پس ز ح برابر ہے ح د کے (جیسا کہ شکل د میں دکھایا جا چکا ہے)[۲۸]
[نقاط] ج اور ہ کو ملاتے ہیں۔
چونکہ ج ب دوگنا ہے ب د کا، اور ہ ب دوگنا ہے ب ح کا، لہٰذا ج ہ۔ د ح کے متوازی[۲۹]
ہے[۳۰] اور ج ہ دوگنا ہے د ح کا۔[۳۱]
پس ج ہ عمود ہے ا ب پر۔[۳۰]

[مثلثات ا ح د اور د ح ب میں زاویئے ا ح د اور د ح ب ایک دوسرے کے برابر ہیں کیونکہ
دونوں قائمے ہیں، زاویہ ح ا د برابر ہے زاویہ ب د ح کے۔
لہٰذا یہ دو مثلثیں ایک دوسری کی متشابہ ہیں۔
∴ ا ح کی نسبت د ح سے وہی ہے جو د ح کو ب ح کے ساتھ ہے
∴ ا ح × ح ب = د ح^۲ ، و ب]

چونکہ و ح کی ضرب ح ب سے [د ح] کے مربع کے برابر ہے

(یعنی [و ح × ح ب = د ح۲]'

لہذا، و ح کی ضرب ح ہ سے، ح ن کے مربع کے برابر ہے، اور

و ح کی نسبت ح ن سے وہی ہے جو ح ن کو ح ہ سے اور و ن کو ن ہ سے ہے۔[۳۱]

نیز ح ن۔ ح ہ سے بڑا ہے کیونکہ {د ح} بڑا ہے ح ب سے

(یوں کہ و د بڑا ہے د ب سے کیونکہ زاویہ {ب و ج} حادہ ہے) [۳۲]

پس، خط و ن بڑا ہے خط ن ہ سے۔[۳۳]

اب، (خط و ن پر) ن ہ کے برابر (ایک خط) ن ط لیتے ہیں۔

تو و ن کو ن ط سے وہی نسبت ہوگی جو ن ح کو ح ہ سے ہے

[کیونکہ و ن : ن ہ :: ح ن : ح ہ، ن ط = ن ہ، اور ح ن = ن ح]، اور و ط کی نسبت

ط ن سے وہی ہوگی جو ن ہ کو ہ ح سے ہے۔[۳۴]

پس، و ط کی ضرب ح ہ سے، {ن ہ} کا مربع، اور و ط کی ضرب {ح ب} سے، ایک دوسرے

کے برابر ہیں۔[۳۵]

اب (چونکہ ن ہ۔ ن ط کے برابر ہے اور ہ ح۔ ح ب کے برابر ہے، لہذا)

ط ب۔ ح ن کا دوگنا ہے،[۳۶] ح ن۔ ح د کے برابر ہے، اور ج ہ۔ ح د کا دوگنا ہے،

لہذا، خط ط ب عمود ج ہ کے برابر ہے، اور

و ط۔ و ب کی عمود ج ہ سے زیادتی (یعنی و ط + ج ہ = و ب)، اور

ط ہ۔ ط ب کی۔ ہ ب۔ سے زیادتی ہے (یعنی ط ہ + ہ ب = ط ب)۔

پس، و ط، ط ہ، اور ہ ب (جو عمود ج ہ کا مسقط الحجر ہے) کا دوگنا (جو علی الترتیب و ب کی عمود

ج ہ سے زیادتی، عمود {ج ہ} کی مسقط الحجر ہ ب سے زیادتی، اور (مسقط الحجر) ہ ب کا

دوگنا، ہیں) اِسی ترتیب سے ہم نسبت ہیں۔

[یعنی جو نسبت و ط کو ط ہ سے ہے وہی نسبت ط ہ کو ہ ب کے دوگنے سے ہے۔]

(وذلک ما اردنا بیانہ)

حواشی و حوالہ جات

۲۳ - اس تناسب کو ایک اور طریقہ سے ثابت کیا جا سکتا ہے۔ نقطہ ج سے قاعدے پر عمود ج ح گرائیں۔ اب مثلثات ا ز ح اور ح خ ب متشابہ ہوں گی۔

لہذا، ا ح : ح ب :: ا ز : ح خ اور چونکہ ح خ = ز د، لہذا

ا ح : ح ب :: ا ز : ز د۔

لیکن اس طور پر ثابت کرنے میں عمل (CONSTRUCTION) میں تبدیلی کرنی پڑے گی لیعنی عمود ح خ نکالنا پڑیگا۔ لہذا اس تناسب کو الجبرا کی مدد سے ثابت کرنا بہتر خیال کیا گیا ہے۔

۲۴ - لیعنی ایک ایسی مثلث متساوی الساقین جس کا معکوس زاویہ (بھی) حادہ ہے۔ اس مسئلہ میں یہ ضروری ہے کہ ساق قاعدے کے زاویئے کے راس سے اپنے اوپر گرنے والے عمود سے بڑی ہو، اور مسقط الحجر اس عمود سے چھوٹا ہو (لہذا یہ ضروری ہوا کہ عمود ساق پر یوں گرے کہ ساق اس طرح دو حصوں میں منقسم ہو جائے کہ قاعدے سے متصل خط لیعنی مسقط الحجر عمود سے چھوٹا ہو)۔ لیکن یہ اس صورت میں ممکن نہیں جبکہ زاویہ معکوس قائمہ یا منفرجہ ہو۔ اگر زاویہ معکوس قائمہ ہو تو قاعدے کے زاویہ کے راس سے متقابل ساق پر عمود خود دوسری ساق ہی ہو گی اور اس طرح ساق اور عمود برابر ہوں گے اور صحیح معنوں میں کوئی مسقط الحجر نہیں ہو گا۔ اگر زاویہ معکوس منفرجہ ہو تو ایسا عمود ساق کے بڑھائے ہوئے حصہ پر مثلث سے باہر گرے گا اور اس طرح (اگر بڑھائی ہوئی ساق کو مسقط الحجر تسلیم کیا جا سکتا ہے) مسقط الحجر ساق سے بڑا ہو گا اور وہ تعلق جو مسئلہ کے لئے ضروری ہے (لیعنی ساق بڑی ہے عمود سے اور وہ بڑا ہے مسقط الحجر سے) ناممکن ہو جائیگا۔

۲۵ - یہاں مسقط الحجر سے مراد اُس ساق کا، جسے متقابل زاویئے کے راس سے گرنے والے عمود نے دو حصوں (SEGMENTS) میں منقسم کر دیا ہو، وہ حصہ ہے جو قاعدہ سے متصل (ADJACENT) ہے۔

۲۶ - لیعنی (ا ب - ج ہ) کی نسبت (ج ہ - ہ ب) سے وہی ہے جو کہ (ج ہ - ہ ب) کو (۲ . ہ ب) سے ہے۔

۲۷ - یہ سارا ثبوت غیر ضروری الجھاؤ سے بھرا ہُوا ہے۔ یہ کہنا مشکل ہے کہ یہ اُلجھاؤ بعد کے لوگوں نے پیدا کیا ہے یا خود ابن الہیثم نے ایسا ہی ثبوت پیش کیا تھا۔

نقطہ ہ تو پہلے ہی آ چکا ہے۔ لیعنی دعویٰ میں ج ہ اور ہ ب کا ذکر ہے۔ لیکن اب ثبوت میں گویا

ج ہ کو فراموش کر دیا گیا ہے اور نقطہ ہ کی تعریف ح ہ کے ذریعہ کی جارہی ہے۔ ظاہر ہے ایسی صورت میں بعد میں ج ہ کو ملانا اور اسے ا ب پر عمود ثابت کرنا ہوگا۔

اس کے برعکس ج ہ کو مان لینے سے ہ ح = ب ح کو ثابت کرنے کے لئے صرف مثلثات ج ہ ب اور د ح ب کو متشابہ ثابت کرنا اور ب د کو ب ج کا نصف ثابت کرنا ہے۔

۲۸۔ شکل د کے ذریعہ اسکو ثابت کرنے کے لئے ضروری ہے کہ پہلے ا ح کو ب ح سے بڑا ثابت کیا جائے۔ لیکن اب تک جو فرض یا ثابت کیا گیا ہے وہ صرف یہ ہے کہ ہ ح۔ب ح کے برابر ہے۔ لیکن ہ ح ۔ا ہ سے بڑا ہو سکتا ہے اور یہ ثابت نہیں کیا گیا ہے کہ ایسا نہیں ہے۔

بہرحال یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ا ح بڑا ہے ب ح سے۔

چونکہ معکوس زاویہ کو حادہ فرض کیا گیا ہے لہذا قاعدہ کا زاویہ 45° سے زائد ہے۔

لہذا، (قائمہ مثلث د ح ب میں) د ح بڑا ہے ب ح سے۔

اب، زاویہ ا د ح برابر ہے زاویہ ا ب د کے، کیونکہ زاویہ ا ب د + زاویہ ب ا د برابر ہے قائمہ کے اور زاویہ ا د ح + زاویہ ح ا د برابر ہے قائمہ کے اور زاویہ ب ا د = زاویہ ح ا د۔

لہذا، زاویہ ا د ح۔ 45° سے زیادہ ہے۔

∴ ا ح بڑا ہے د ح سے

∴ ا ح بڑا ہے ب ح سے۔

۲۹۔ یہ ثابت نہیں کیا گیا ہے۔ بہرحال یہ ایک مسلمہ امر ہے کہ مثلث متساوی الساقین میں معکوس زاویئے سے قاعدے پر گرنے والا عمود قاعدے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

اس کا ثبوت نہایت آسان ہے۔ اگر ا ب ج ایک ایسی مثلث اور ا د ایک ایسا عمود ہے تو مثلثات ا ب د اور ا ج د میں ا ب برابر ہے۔ ا ج کے، ا د مشترک ہے۔ اور زاویہ ا د ب = 90° = زاویہ ا د ج۔ لہذا دونوں مثلثیں ایک دوسرے کی متشابہ ہیں۔ لہذا، ا د کی نسبت ب د سے وہی ہے جو ا د کو ج د سے ہے۔ لہذا، ب د = ج د، پس، ج ب = ۲ ۰ ب د۔

۳۰۔ اگر ہم ان تین نتائج یعنی (i) ج ہ ‖ ا د ح، (ii) ج ہ = ۲ د ح اور (iii) ج ہ عمود ہے ا ب پر، میں سے کسی ایک کو مان لیں تو اب تک جو باتیں فرض یا ثابت کی گئی ہیں ان کی مدد سے باقی دونوں

کو بھی ثابت کیا جا سکتا ہے۔ لیکن سوال یہ ہے کہ کسی ایک کو کیوں مان لیا جائے؟

بہرحال، یہ تمام نتائج ثابت کئے جا سکتے ہیں!

ثبوت: (جیسا کہ پہلے ثابت کیا جا چکا ہے) ب ج = ۲ . ب د

اب (چونکہ مثلثات ب ح د اور ہ ح د کو متشابہ ثابت کیا جا سکتا ہے)۔

ب د = د ہ، اور زاویہ د ب ح = زاویہ د ہ ب۔

∴ د ہ = د ج (کیونکہ د ہ اور د ج دونوں ب د کے برابر ہیں)

∴ (مثلث د ہ ج میں) زاویہ د ہ ج = زاویہ۔ د ج ہ۔

اب، زاویان ا ہ ج + ج ہ د + د ہ ب = ۱۸۰°، اور

زاویان ا ہ ج + ا ج ہ + ہ ا ج = ۱۸۰°

لہذا، زاویئے ج ہ د + د ہ ب = زاویئے ا ج ہ + ہ ا ج

لیکن، زاویہ ا ج ب = زاویئے ا ج ہ + ہ ج ب اور زاویہ د ہ ب = زاویہ ا ج ب۔

(کیونکہ زاویہ د ہ ب = زاویہ د ب ہ)

∴ زاویئے ج ہ د + ا ج ہ + ہ ج ب = زاویئے ا ج ہ + ہ ا ج

∴ زاویئے ج ہ د + ہ ج ب = زاویہ ہ ا ج۔

∴ (کیونکہ زاویہ ب ا د = زاویہ د ا ج = ½ زاویہ ب ا ج = ½ زاویہ ہ ا ج یعنی زاویہ

ہ ا ج = ۲ . زاویہ ب ا د)

زاویئے ج ہ د + ہ ج ب = ۲ . زاویہ ب ا د۔

∴ (کیونکہ زاویہ ج ہ د = زاویہ ہ ج د = زاویہ ہ ج ب)

زاویئے ج ہ د + ج ہ د = ۲ . زاویہ۔ ب ا د۔

∴ ۲ . زاویہ ج ہ د = ۲ . زاویہ ب ا د۔

∴ زاویہ ج ہ د = زاویہ ب ا د

اسی طرح، (مثلثات ب د ح اور ا د ب میں)

زاویئے ب د ح + د ب ح = ۹۰° = زاویئے ب ا د + ا ب د

∴ (کیونکہ زاویہ د ب ح = زاویہ ا ب د) زاویہ ب د ح = زاویہ ب ا د۔

لہذا، زاویہ ج ہ د = زاویہ ب د ح (کیونکہ دونوں کو زاویہ ب ا د کے برابر ثابت کیا جا چکا ہے)۔

∴ ہ ج اور د ح قاعدے ب ج سے ایک جیسا زاویہ بناتے ہیں۔	∴ (مثلثات ب ہ ج اور ب ح د میں) زاویئے ہ ب ج + ہ ج ب = زاویہ ج ب د + ب د ج = $90°$
∴ ہ ج اور د ح ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔	∴ (کیونکہ زاویئے ب ہ ج + ہ ب ج + ہ ج ب = $180°$) زاویہ ب ہ ج = $90°$
∴ ہ ج ضلع ا ب پر عمود ہے اور ب ہ ج = $90°$	∴ ہ ج ضلع ا ب پر عمود ہے اور د ح کے متوازی ہے۔

∴ (کیونکہ مثلثات ج ہ ب اور د ب ح متشابہ ثابت کی جا سکتی ہیں، اور ب ح = ½ - ہ ب)
ہ ج = ۲ . د ح

۳۱- دوسری نسبت نہ واضح ہے نہ ابن الہیثم نے ثابت کرنے کی کوشش کی ہے۔ لیکن یہ تعلق صحیح ہے اور الجبرے کی مدد سے بہ آسانی ثابت کی جا سکتی ہے۔

یہ دیا ہوا ہے کہ ا ح : ح ز :: ح ز : ح ب (کیونکہ ا ح × ح ب = ح ز²)

لہذا، (ا ز + ح ز) : ح ز :: (ز ہ + ہ ح) : ح ہ (کیونکہ ا ح = ا ز + ح ز، ح ز = ز ہ + ح ہ اور ح ب = ح ہ)

∴ {کیونکہ اگر (ا + ب) : ب :: (ج + د) : د، تو ا : ب :: ج : د یعنی اگر $\frac{ا+ب}{ب} = \frac{ج+د}{د}$، تو $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$، کیونکہ $\frac{ا+ب}{ب} = \frac{ج+د}{د}$، یعنی
$\frac{ا}{ب} + \frac{ب}{ب} = \frac{ج}{د} + \frac{د}{د}$، یعنی $\frac{ا}{ب} + ۱ = \frac{ج}{د} + ۱$، یعنی $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ }

∴ (کیونکہ اگر ا : ب :: ج : د، تو ا : ج :: ب : د، یعنی اگر $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ تو $\frac{ا}{ج} = \frac{ب}{د}$)

ا ز : ح ز :: ز ہ : ح ہ

∴ ا ز : ز ہ :: ح ز : ح ہ

اب چونکہ یہ پہلے ہی ثابت کیا جا چکا ہے کہ ا ح : ح ز :: ح ز : ح ہ

یہ بات ثابت ہوئی کہ ا ح : ح ز :: ح ز : ح ہ :: ا ز : ز ہ

۳۲- چونکہ زاویہ ب ا ج حادہ ہے لہذا زاویہ ب ا د جو کہ زاویہ ب ا ج کا آدھا ہے $45°$ سے کم ہے۔
لہذا ا د بڑا ہے د ب سے۔

اب چونکہ مثلثات ا د ب اور د ح ب متشابہ ثابت کی جا سکتی ہیں

لہذا، ا د : د ب :: د ح : ح ب۔ اس طرح یہ ثابت ہوا کہ د ح - ح ب سے بڑا ہے۔

اب ہم جانتے ہیں کہ د ح = ح ز، اور ح ب = ح ہ، لہذا یہ ثابت ہوا کہ ح ز - ح ہ سے بڑا ہے۔

(لیکن اس ثبوت کی قطعی ضرورت نہیں تھی۔ کیونکہ ہم یہ پہلے ہی فرض کر چکے ہیں کہ ح ز = ز ہ + ہ ح